14. On the Generalized Law of Regression of Fluctuations in Stochastic Processes

落合, 萌; 山崎, 義武; Holz, Arno

文　献

1) 原　啓明：数理科学No. 269, 35(1985)
H. Hara: *Science on Form* **1**, 59 (1985)

2) 原　啓明：電子通信学会，MBE 85－87, 59(1986)

3) G. Nicolis and A. Babloyantz: J. Chem. Phys. **51**, 2632 (1969)

4) B. Katz: *Nerve, muscle and synapse* (1966), New York Mcgraw-Hill.

5) D. H. Ackley and G. E. Hinton: Cognitive Science **9**, 147 (1985)

14. On the Generalized Law of Regression of Fluctuations in Stochastic Processes

湘北短大・電子　落　合　　萌
東北大・工　山　崎　義　武
ザールランド大・物理　Arno　Holz

非平衡状態にある系で，緩和過程の各種ステージを特徴づける空間あるいは時間サイズがそれぞれのステージで明確に分離されているかぎり，粗視化の手法に scaling expansion method[1] は有効である。観たいステージを表わすパターンに特徴的なサイズで scaling をくりかえすことにより，対応するパターンの形成過程とそれを記述する決定論的径路およびゆらぎに関する閉じた方程式を定めることができる。

ここでは，各種パターンを特徴づける決定論的径路を線型近似の範囲内で論ずれば，これがそのまわりのゆらぎの従う運動方程式に一致することを報告する。

Onsager の regression of fluctuations の仮定が，ただたんに熱平衡状態においてのみいえたことに対し，本報告ではこれが拡張できて，着目する各ステージそれぞれにおいて成立していることが，マスター方程式できまる微視的立場からいえたわけで，このことは非平衡系の緩和過程を scaling expansion method により粗視化をくりかえすことにより組織的に論じ，regression of flucfuations の仮定から，仮定の枠をとりはずす一般化が行えたことも意味する。

体系を記述する巨視的変数Aはあらゆる時間・空間モードを含み，これは，調べたいサイズ

のベキ則で

$$A = \sum_{\nu} \Omega^{\nu} a_{(\nu)} \tag{1}$$

と書かれる[2)]。a_ν は Ω^ν でスケールされた不変量で，サイズ Ω^ν を持つパターンを特徴づける物理量である。

いま，理想気体から成る系を採り，そのふるまいを，位置座標をぬりつぶした運動量座標から成る位相空間で考える。この位相空間を巨視的サイズVの細胞に分け i 番目の細胞中の時刻 t における分子数を n_i とすれば，

$$P(n_1, n_2, \cdots, n_i, n_j, \cdots; t) \equiv P(\{n\}; t)$$

を確率密度関数として，マスター方程式は

$$\frac{\partial P(\{n\}; t)}{\partial t} = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{ij\,kl \\ (ij \neq kl)}} \alpha_{kl\,ij}\, n_i\, n_j\, P(\{n\}; t)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{ij\,kl} \alpha_{ij\,kl} (n_k + 1)(n_l + 1) P(\{n\}', n_i - 1,\ n_j - 1,\ n_k + 1,$$

$$n_l + 1; t) \tag{2}$$

と書ける。ただし，2体衝突のみを考え，せん移確率に衝突数算出の仮定と分子混沌の仮定を入れた。$\alpha_{ij\,kl}$ は衝突の断面積である。

系のゆらぎの様子を知るにはモーメントの運動方程式を得るより，キュムラントの運動方程式を導いて論じた方が直截的で都合がよい。キュムラントの母関数を導入し，(2)式を

$$\frac{\partial c_m(\{\mathrm{i}\xi\}; t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{kl\,ij} \alpha_{kl\,ij}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\xi_k + \xi_l - \xi_i - \xi_j)}$$

$$\times \left\{ \frac{\partial c_m(\{\mathrm{i}\xi\}; t)}{\partial(\mathrm{i}\xi_i)} \frac{\partial c_m(\{\mathrm{i}\xi\}; t)}{\partial(\mathrm{i}\xi_j)} + \frac{\partial^2 c_m(\{\mathrm{i}\xi\}; t)}{\partial(\mathrm{i}\xi_i)\,\partial(\mathrm{i}\xi_j)} \right\} \tag{3}$$

と書けば，1次，2次のキュムラント λ_{1p}，$\lambda_{1p\,1q}$ の従う式はそれぞれ

$$\frac{\partial \lambda_{1p}(t)}{\partial t} = \sum_{\substack{l\,ij \\ (pl \neq ij)}} \alpha_{pl\,ij} \{ \lambda_{1i}(t)\, \lambda_{1j}(t) + \lambda_{1i\,1j}(t) \}$$

$$- \sum_{\substack{k\ell j \\ (k\ell \fallingdotseq pj)}} \alpha_{k\ell\, pj} \{ \lambda_{1p}(t) \lambda_{1j}(t) + \lambda_{1p\,1j}(t) \} \tag{4}$$

および

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_{1p\,1q}}{\partial t} = \frac{1}{2} \Big[& \sum_{\substack{ij \\ (ij \fallingdotseq pq)}} (\alpha_{pq\,ij} + \alpha_{qp\,ij}) \{ \lambda_{1i}(t) \lambda_{1j}(t) + \lambda_{1i\,1j}(t) \} \\ & + \sum_{\substack{\ell k\ell \\ (k\ell \fallingdotseq pq)}} (\alpha_{k\ell\, pq} + \alpha_{k\ell\, qp}) \{ \lambda_{1p}(t) \lambda_{1q}(t) + \lambda_{1p\,1q}(t) \} \\ & - 4 \sum_{\substack{kj \\ (kp \fallingdotseq qi)}} \alpha_{kp\,qj} \{ \lambda_{1q}(t) \lambda_{1j}(t) + \lambda_{1q\,1j}(t) \} \\ & - 4 \sum_{\substack{kj \\ (kq \fallingdotseq pj)}} \alpha_{kq\,pj} \{ \lambda_{1p}(t) \lambda_{1j}(t) + \lambda_{1p\,1j}(t) \} \\ & + \sum_{\substack{\ell ij \\ (p\ell \fallingdotseq ij)}} \alpha_{p\ell\, ij} \{ 4\lambda_{1q\,1i}(t) \lambda_{1i}(t) + 2\lambda_{1q\,1i\,1j}(t) \} \\ & + \sum_{\substack{\ell ij \\ (q\ell \fallingdotseq ij)}} \alpha_{q\ell\, ij} \{ 4\lambda_{1p\,1i}(t) \lambda_{1j}(t) + 2\lambda_{1p\,1i\,1j}(t) \} \\ & - \sum_{\substack{k\ell j \\ (k\ell \fallingdotseq pj)}} \alpha_{k\ell\, pj} \{ 2\lambda_{1q\,1p}(t) \lambda_{1j}(t) + 2\lambda_{1q\,1j}(t) \lambda_{1p}(t) + 2\lambda_{1q\,1p\,1j}(t) \} \\ & - \sum_{\substack{k\ell j \\ (k\ell \fallingdotseq qj)}} \alpha_{k\ell\, qj} \{ 2\lambda_{1p\,1q}(t) \lambda_{1j}(t) + 2\lambda_{1p\,1j}(t) \lambda_{1q}(t) + 2\lambda_{1q\,1p\,1j}(t) \} \end{aligned} \tag{5}$$

となる。これらは鎖方程式の最初の２式を書き下したものにすぎず，閉じた関係を与えていない。

scaling expansion method[1)] により，

$$\lambda_{1p}(t) = V f_p(t) + V^{\frac{1}{2}} \langle u_p \rangle \equiv V f_p(t) + V^{\frac{1}{2}} u_p(t) \tag{6}$$

$$\lambda_{1p\,1q}(t) = V \sigma_{pq}(t) \tag{7}$$

が得られ，また，最も有効な項を拾わねばならないことから

$$\alpha_{ij\,kl} = V^{-1} A_{ij\,kl} \tag{8}$$

ととり，鎖は解けて決定論的方程式

$$\frac{\mathrm{d}f_p(t)}{\mathrm{d}t}=\sum_{\substack{l\,ij\\(pl\neq ij)}}\{A_{pl\,ij}f_i(t)f_j(t)-A_{ij\,pl}f_p(t)f_l(t)\} \tag{9}$$

そのまわりのゆらぎを与える式

$$\frac{\mathrm{d}u_p(t)}{\mathrm{d}t}=\sum_{\substack{l\,ij\\(pl\neq ij)}}[A_{pl\,ij}\{f_i(t)u_j(t)+f_j(t)u_i(t)\}$$

$$-A_{ij\,pl}\{f_p(t)u_l(t)+f_l(t)u_p(t)\}] \tag{10}$$

ゆらぎの分散をきめる式

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{pq}(t)}{\mathrm{d}t}=\sum_{\substack{ij\\(pl\neq ij)}}A_{pq\,ij}f_i(t)f_j(t)+\sum_{\substack{kl\\(kl\neq pq)}}A_{kl\,pq}f_p(t)f_q(t)$$

$$-2\sum_{\substack{kj\\(kp\neq qj)}}A_{kp\,qj}f_q(t)f_j(t)-2\sum_{\substack{kj\\(kp\neq pj)}}A_{kq\,pj}f_p(t)f_j(t)$$

$$+2\sum_{\substack{l\,ij\\(pl\neq ij)}}A_{pl\,ij}\sigma_{qi}(t)f_j(t)+2\sum_{\substack{l\,ij\\(ql\neq ij)}}A_{ql\,ij}\sigma_{pi}(t)f_j(t)$$

$$-\sum_{\substack{kl\,j\\(kl\neq pj)}}A_{kl\,pj}\{\sigma_{qp}(t)f_j(t)+\sigma_{qj}(t)f_p(t)\}$$

$$-\sum_{\substack{kl\,j\\(kl\neq qj)}}A_{kl\,qj}\{\sigma_{pq}(t)f_j(t)+\sigma_{pj}(t)f_q(t)\} \tag{11}$$

が得られる。(9)式は非線型 Boltzmann方程式で，いまこれを線型近似の範囲でみれば

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta f_p(t)=\sum_{\substack{l\,ij\\(pl\neq ij)}}[A_{pl\,ij}\{f_j(t)\Delta f_i(t)+f_i(t)\Delta f_j(t)\}$$

$$-A_{ij\,pl}\{f_l(t)\Delta f_p(t)+f_p(t)\Delta f_l(t)\}] \tag{12}$$

が得られる。ただし $f(t)-f^{(e)}\equiv\Delta f(t)$ 。

(10)式は(9)式できめられるパターンのまわりのゆらぎの様子を表わしたもので，ゆらぎの緩和過程をみせてくれている。

一方，⑿式は線型近似が成立する領域，つまり平衡あるいは定常過程近傍での，巨視的物理量の緩和の様子を定めた式である。これを⑽式と比較すれば，変数の満たす式の構造は一致し，このことは線型近似の成り立つ領域内にあってはそのまわりのゆらぎの緩和過程がたしかに巨視的物理量の緩和の様子に等しいことを主張する。

線型領域におけるゆらぎの緩和が巨視的物理量のそれに一致するという事実は着目するパターン形成に対応する各ステージにおいて成立し，このことからこれはまた，ブラウン運動論でいわれている自己相似性を支持するものにほかならない。

本報告において，Onsager のいう regression of fluctuation の仮定から仮定の枠組をとりはずした一般化が行えたことと，同時にいえた自己相似性によって，ゆらぎの緩和則が普偏性の高い法則となりえたことを解析的に示せたことは新しい。

参考文献

1) M. Ochiai: Lett. Nuovo Cimento **40** (1984) 433

2) M. Ochiai, A. Holz and Y. Yamazaki to be published

15. 細長い棒状弾性体における動力学

東大・教養　鶴　　秀　生

細長い棒状の連続体は局所的に微少な変形しか許さない場合でも全体的には大変形を伴うことができる。このような大変形の影響を考慮することによって，弾性体の運動を記述する方程式は線形の弾性法則に従う場合でも大変複雑な非線形方程式となる。大変形の影響を考慮した細長い棒状弾性体の運動方程式は変分法を使って導かれる。その方程式を基にして様々な運動を調べることにする。特にソリトン解が存在することがわかった。

弾性体の変形による弾性エネルギーUは，曲げの弾性エネルギーU_bと振りの弾性エネルギーU_tの和で表すことができる。

$$U = U_b + U_t = \frac{A}{2}\int_0^L (\theta'^2 + \sin^2\theta\,\varphi'^2)\,\mathrm{d}s + \frac{c}{2}\int_0^L (\cos\theta\,\varphi' + \psi')^2\,\mathrm{d}s$$

ここで（′）は棒の弧長に対する微分，A，C は曲げと振りの弾性定数，θ，ϕ，ψ はオイラー角である。また運動エネルギーKは，棒の並進運動によるエネルギーK_{tr}，接ベクトルの回転